Universidade Federal da Campina Grande
Departamento de Engenharia Elétrica
Álgebra Linear
Prof. Edmar Candeia Gurjão
4a Lista de Exrcícios
Data: 23/07/2018

Problema 1 *Encontre os autovalores e autovetores de a)* $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *b)* $T(x,y) = (3/2x, -2y)$; *usando a base* $\{(1,2),(0,3)\}$

Modificado do problema Internet http://math.bard.edu/ mbelk/math601/LinearAlgebraSolutions.pd
Questão 10

Problema 2 *A matriz abaixo é digonalizável? Justifique sua resposta.* $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 3 *A matriz abaixo é diagonalizável ? Em caso afirmativo, qual a matriz diagonal.* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 4 *Determine os autovalores e autovetores de:*

a) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

b) $T(x,y,z) = (-x - 2y + 2z, y, z)$

Problema 5 *Seja* A *uma matriz* 3×3 *tal que* $A^2 = 4A - 4I$.

a) Quais são os possíveis autovalores de A*?*

b) Dê um exemplo de uma matriz 3×3, $A \neq 2I$ *que satisfaz* $A^2 = 4A - 2I$.

Problema 6 *Para cada uma das seguintes transformações* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *encontre todos os autovalores e uma base para cada um dos autoespaços. a)* $T(x,y) = (3x + 3y, x + 5y)$ *b)* $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2$ $T(x,y) = (y,x)$ *c)* $T(x,y) = (y,-x)$

Problema 7 *Determine os autovalores e autoespaços da seguintes transformações:*

a) $T(x,y) = (x + y, y)$;

b) $T(x,y) = (3/2x, 2y)$;

c) $T(x,y) = (3/2x, -2y)$;

d) $T(x;y) = (x/2, 2y)$.

Problema 8 *Dadas as matrizes a seguir, determine seus autovalores e uma base para cada autovalores associados.*

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 9 *Determine os autovalores e autovetores das matrizes a)* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -5 \\ 8 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, *b)* $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solução:

a) $p(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda)(9-\lambda)$,
para $\lambda = 1$ $v = r(-1,-1,1)$. Para $\lambda = 4$ $v = s(0,1,0)$ e para $\lambda = 9$ $v = t(0,-1,0)$.

b) $p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$. Para $\lambda = 1$, $v = x(1,-1,1)$, para $\lambda = -2$ $v = x(-1,1,0) + y(-1,0,1)$.

Problema 10 *Suponha que* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *é uma autovetor da matriz* A *que corresponder ao autovalor 3, e que* $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *é outro autovetor de* A *correspondente ao autovalor* -2*. Calcule* $A^2 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solução:

$(4,3) = 2(1,1) + (2,1)$. $A^2(4,3) = A^2[(2(1,1) + 1(1,2) = 2A^2(1,1) + A^(2,1) = 2.9(1,1) + 4(2,1) = (26,22)$

Problema 11 *Justifique as afirmativas abaixo:*

a) A transformação aplicada ao seu autovetor não muda sua direção.

b) Os autovetores associados a um autovalor formam um subespaço vetorial.

Problema 12 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear definida por*

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2$$

atribua valores diferentes de zero para a_0, a_1 *e* a_2 *e determine os autovalores e autovetores da matriz dessa transformação com relação à base* $B = \{1, x, x^2\}$.

Problema 13 *Determine os autovalores e autovetores associados as matrizes das transformações abaixo:*

a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *definida por* $T(3,1)=(2,-4)$ *e* $T(1,1)=(0,2)$,

b) $T:P_2\to P_2$ *sendo* $T(ax^2+bx+c)=ax^2+cx+b$

c) $F:M_{2\times2}\to M_{2\times2}$ *sendo* $F(A)=CA$, *com* $C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$

Combinação do Exemplo 2, pp 238. Exercício 5, pp 241, Strang

Problema 14 *Para cada uma das matrizes abaixo, determine os autovalores e autovetores associados: a)* $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ *b)* $B=\begin{bmatrix}3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ *c)* $C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Problema 15 *Indique quais das matrizes abaixo são diagonalizáveis. E para as que forem diagonalizáveis, mostre a matriz diagonal. a)* $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ *b) c)* $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

Problema 16 (2,0 pontos) *Suponha que* v *é um autovetor das transformações* S *e* T. *Mostre que* v *é um autovetor da transformação* $aS+bT$, *sendo* a *e* b *escalares.*

Problema 17 *Seja*

$$A=\begin{bmatrix}a & a\\ c & d\end{bmatrix}$$

encontre as condições, em termos de a, c *e* d *para que essa matriz seja diagonalizável.*

Problema 18 *Sejam* a, b *e* c *escalares e* $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & c\\ 1 & 0 & b\\ 0 & 1 & a\end{bmatrix}$. *Mostre que os polinômios característicos e minimal são iguais.*

Problema 19 *Indique quais das matrizes abaixo são diagonalizáveis. E para as que forem diagonalizáveis, mostre a matriz diagonal. a)* $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$ *b)* $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

Problema 20 *Verifique se cada uma das matrizes abaixo é diagonalizável, e caso seja mostre a matriz diagonal*

a) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

Problema 21 *Seja que $A_{n\times n}$ com autovalor λ e autovetor v, responda:*

a) Se A é inversível, v é um autovalor de A^{-1}?

b) $3v$ é um autovalor de A?

Problema 22 *Determine se as matrizes abaixo são diagonalizáveis. a)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Problema 23 *Para cada uma das matrizes abaixo, determine os autovalores e autovetores associados: a)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *b)* $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

Problema 24 *Para cada uma das matrizes abaixo, encontre todos os autovetores e uma base para o espaço. a)* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *b)* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ *c)* $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 25 *Para cada uma das seguintes transformações $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ encontre todos os autovalores e uma base para cada um dos autoespaços.*

a) T(x, y, z) = (x + y +z,2y + z, 2y + 3z)

b) T(x, y, z) = (x + y, y + z, -2y - z) usando a base {(1,0,0), (,1,1,0), (0,1,1)}

Problema 26 *Suponha que v é um autovetor das transformações S e T. Mostre que v é um autovetor da transformação $aS + bT$, sendo a e b escalares.*

Problema 27 *Quais das matrizes abaixo são diagonalizáveis? a)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 28 *Mostre que a matriz* $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *não é diagonalizável para qualquer λ escalar. Calcule J^2, J^3 e J^4. Qual a fórmula para determinar J^k, sendo k um inteiro positivo?*

Problema 29 *Seja T o operador linear sobre $\mathbb{R}^4$ representado na base canônica pela matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

Em que condições sobre a, b e c, T é diagonalizável?

Problema 30 *Explique como as seguintes afirmativas estão relacionadas:*

a) *A matriz de uma transformação* $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *tem* N *autovalores distintos.*

b) *Os autovetores associados ao autovalores dessa transformação formam uma base para o autoespaço.*

c) *A base do autoespaço é uma base para o espaço* $\mathbb{R}^N$.

Problema 31 *Explique como as seguintes afirmativas estão relacionadas:*

a) *A matriz de uma transformação* $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *não tem* N *autovalores distintos.*

b) *A quantidade de autovetores distintos associados aos autovalores é* N.

c) *A base do autoespaço é uma base para o espaço* $\mathbb{R}^N$.

Problema 32 *Seja* λ *um autovalor de* $\mathbf{A}$ *com autovetor associado* $\mathbf{x}$, *mostre que* λ^k *é um autovalor de* $A^k = A \cdot A \cdot A \cdot ...A$ *com autovetor associado* $\mathbf{x}$, *sendo* k *um inteiro positivo.*

Problema 33 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

encontre as condições, em termos de a, b, c *e* d *para que essa matriz seja diagonalizável.*

Problema 34 *Sejam* A *e* B *matrizes* $N \times N$ *tais que* $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ *e* $B\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$. *Mostre que:*

a) $(A + B)\mathbf{x} = (\lambda + \mu)\mathbf{x}$

b) $(AB)\mathbf{x} = (\lambda\mu)\mathbf{x}$

Problema 35 *Verifique que a matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *é diagonalizável, e determine sua matriz diagonal.*