Álgebra Linear

Edmar Candeia Gurjão

Departmento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Campina Grande

ecandeia@dee.ufcg.edu.br

Agosto 2018

Espaço Vetorial

Vamos considerar vetores com ponto inicial na origem, denominados **vetores no plano**, e usaremos as notações $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ou $\mathbf{v} = (a, b)$ no plano x, y.
FIGURA
As seguinte operações podem ser realizadas com vetores:

- Multiplicação por um escalar

$\mathbf{u} = k\mathbf{v}$, produz um vetor com mesma direção de $\mathbf{v}$, porém com o mesmo sentido se $k > 0$, e sentido oposto se $k < 0$. Se $k = 0$ teremos o vetor nulo. Na notação vetorial

$$\mathbf{u} = k\mathbf{v} = \begin{bmatrix} k \cdot a \\ k \cdot b \end{bmatrix}.$$

Espaço Vetorial

Definição

Um espaço vetorial real é um conjunto V, com elementos denominados de vetores, não vazio, com duas operações: soma $V \times V \to V$, e mulitplicação por escalar $\mathbb{R} \times V \to V$, tais que $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$, as propriedades abaixo são satisfeitas:

i) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$;

ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;

iii) *Existe* $0 \in V$ *tal que* $\mathbf{u} + 0 = \mathbf{u}$ *(0 é o vetor nulo);*

IV) *Existe* $-\mathbf{u} \in V$ *tal que* $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0$;

V) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$;

VI) $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$;

VII) $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$;

VIII) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Exemplo

O conjunto dos vetores (x, y, z) com x, y e $z \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial.

Exemplo

O conjunto das matrizes M_{23} formado por todas as matrizes 2×3 é um espaço vetorial.

Exemplo

Seja $V = \mathbb{R}^2$ com as operações
$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$ *e* $k\mathbf{v} = \begin{bmatrix} kv_1 \\ 0 \end{bmatrix}$*, não é um espaço vetorial pois* $1\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{v}$*, logo a condição VIII falha.*

Exemplo

$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *não é espaço vetorial, pois* $\mathbf{u} = (0, 1) \in V$*, porém* $2\mathbf{u} = (0, 2) \notin V$.

Subespaço Vetorial

É possível que subconjuntos de um espaço vetorial V, formem um espaço "menor". A esse subconjunto damos o nome de espaço vetorial, definido a seguir.

Definição

Um subconjunto de W de um espaço vetorial V, é um subespaço vetorial se:

1. *Para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$*
2. *Para quaisquer $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in w$, $a\mathbf{u} \in W$*

Exemplo

Dado um espaço vetorial $V = \{(x_1, x_2, x_3),\ tal\ que\ x_i \in \mathbb{R}\}$, temos os subespaços $W = \{(x_1, x_2, 0), x_i \in \mathbb{R}\}$, $S = \{(0, x_2, x_3)\ x_i \in \mathbb{R}\}$. Quais os possíveis subespaços de $\mathbb{R}^3$?

Exemplo

Considere o conjunto W de todas as matrizes 2×3 da forma $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix}$, mostra-se que W é subespaço vetorial de M_{23}, pois dados $U = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$, então

$U + A = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in W$ e

$kU = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 & 0 \\ 0 & kc_1 & kd_1 \end{bmatrix} \in W$

Exemplo

O conjunto S formado por todos os vetores da forma $(a, b, 1)$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times n$, e W o conjunto de todos os vetores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tais que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, então

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{Ay} = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{0},$$

Combinação Linear

Teorema

A intersecção de dois subespaços vetoriais H e W de um espaço V, denotada por $H \cap W$, é um subespaço vetorial.

Prova: O vetor nulo estará presente em $H \cap W$, e dado que $\mathbf{u} e \mathbf{v} \in H \cap W$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$ e $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$, logo $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H \cap W$.

Definição

Sejam V um espaço vetorial, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n \in V$ e $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais. O vetor

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_n\mathbf{v}_n$$

é um elemento de V que chamaremos de combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$.

Mantendo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ fixos, o conjunto de todas as combinações lineares destes vetores é um subespaço vetorial, denominado subespaço gerado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, e denotado por

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n]$$

ou ainda

$$W = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n] = \{\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}.$$

Exemplo

Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Os vetores formados pela combinação linear $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ geram o subespaço $W = [\mathbf{v}_1., \mathbf{v}_2]$ que é um plano, ou seja

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Exemplo

Expresse um conjunto de vetores que pode gerar o $\mathbb{R}^3$.

Definição

Seja V um espaço vetorial e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n \in V$. O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ é **linearmente independente** *ou LI se a equação*

Dependência e Independência Linear

Exemplo

Sejam $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ *e* $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$, *então*

$$\begin{aligned} a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 &= (0,0,0) \\ a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) &= (0,0,0) \\ (a_1, a_2, a_3) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

logo como $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, *conjunto* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *é LI.*

Exemplo

os vetores $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *e* $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ *são LD, pois,*

$-3\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Exemplo

O conjunto formado pelos vetores $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *do exemplo anterior é LI.*

Exemplo

Sejam os vetores $\{(1,0,\alpha), (1,1,\alpha), (1,1,\alpha^2)\}$ *de vetores no* $\mathbb{R}^3$ *com* $\alpha \neq 0$ *e* $\alpha \neq 1$. *Fazendo a combinação linear,*

$$x(1,0,\alpha) + y(1,1,\alpha) + z(1,1,\alpha^2) = (0,0,0)$$

temos

$$\left\{ \begin{aligned} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ \alpha x + \alpha y + \alpha^2 z = 0 \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ (\alpha^2 - \alpha) z = 0 \end{aligned} \right.$$

e como $\alpha \neq 0$ *e* $\alpha \neq 1$ *então* $\alpha^2 - \alpha \neq 0$, *o que acarreta* $z = 0$, *e com isso* $y = 0$ *e* $z = 0$. *Logo o conjunto é LI.*

Exemplo

Se $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *forem LI, então* $\mathbf{s} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ *e* $\mathbf{t} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ *também são LI, pois* $a\mathbf{s} + b\mathbf{t} = \mathbf{0}$, $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + b(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$, $(a+b)\mathbf{u} + (a-b)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$$a + b = 0$$

Exemplo

Se o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ *de vetores de um espaço* V *for LI, então o conjunto* $\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\}$ *também é LI, vejamos*

$$x(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + y(\mathbf{u}+\mathbf{w}) + z(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{0}$$

temos

$$(x+y)\mathbf{u} + (x+z)\mathbf{v} + (y+z)\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

e $\begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ *escrevendo na forma escalonada* $\begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \\ z=0 \end{cases}$ *cuja única solução é* $x=y=z=0$, *logo o conjunto é LI.*

Exemplo

O conjunto $\{1, \cos(x), \cos(2x)\}$ *com* $x \in [-\pi, \pi]$ *é LI, pois* $\alpha + \beta\cos(x) + \gamma\cos(2x) = 0, \ \forall x \in [-\pi, \pi]$, *então*

$$\begin{aligned} x = -\pi &\to \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ x = 0 &\to \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ x = \pi/2 &\to \alpha - \gamma = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

e escalonando

$$\begin{aligned} \alpha - \beta + \gamma &= 0 \\ 2\beta &= 0 \\ \beta = 2\gamma &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

portanto o conjunto é LI.

Base de um Espaço Vetorial

Definição

Um conjunto $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_1\}$ *de vetores de* V *será uma base de* V *se:*

1. $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_1\}$ *é LI*
2. $[\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_1] = V$

Exemplo

Sejam $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *e* $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, *o conjunto* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ *forma uma base para o* $\mathbb{R}^2$, *conhecida como* **base canônica**.

Exemplo

O conjunto de matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *é uma base para* $M_{2\times 2}$.

Exemplo

Os $n+1$ *polinômios* $1, t, t^2, ..., t^n$ *formam uma base para o espaço* P_n *de todos os polinômios de grau* n.

Exemplo

O subconjunto de vetores $\{(0, 2, 2), (0, 4, 1)\}$ *é uma base do subespaço* $U = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$

1. Os vetores são LI $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, logo $x = y = 0$
2. $\mathbf{v} = a_1(0, 2, 2) + a_2(0, 4, 1) = (0, 2a_1 + 4a_2, 2a_2 + 2a_1) \in U \ \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

Teorema

Sejam $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ *vetores não nulos que geram um espaço vetorial* V. *Então dentre esses vetores podemos extrair uma base para* V.

1. Se $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ são LI, então já são uma base de V.
2. Se $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ são LD, então pelo menos um desses vetores é combinação linear dos demais, e assim caso o conjunto $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}\}$ seja LI ele é uma base. Caso esse novo conjunto seja LD, repete-se o raciocínio até encontrar um conjunto

Base de um espaço vetorial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & -9 & 7 \\ 1 & 3 & -1 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

e após o escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & -6 & 3 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

como somente as duas primeiras linhas são nulas $\{v_1, v_2\}$ é uma base para W.

Corolário

Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos, e este número é denominado **dimensão** *de V, e denotado por $dim(V)$.*

Exemplos: 1) $dim(\mathbb{R}^2) = 2$, 2) $dim(\mathbb{R}^n) = n$, c) $dim(M_{2\times 2}) = 4$, 4) $dim(P_n) = n + 1$.

Teorema

Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita n, pode ser completado de modo a formar uma base de V.

Corolário

se $Dim(V) = n$, qualquer conjunto de n vetores LI de V formará uma base de V.

Teorema

Dada uma base $\beta = [\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n]$ de um espaço vetorial V, cada vetor de V é escrito como uma única combinação linear de $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$.

Prova: Suponha que existam duas formas de escrever um vetor:
$\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n$ e $\mathbf{w} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + ... + b_n\mathbf{v}_n$,
fazendo a subtração obtemos
$0 = (a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{v}_2 + ... + (a_n - b_n)\mathbf{v}_n$, porem como o

Base de um espaço vetorial

Definição

Sejam $\beta = [\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n]$ *base de* V, *e* $\mathbf{w} \in V$, *sendo* $\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n$. *Os números* $a_1, a_2, ..., a_n$ *são chamados de coordenadas de* $\mathbf{w}$ *em relação à base* β *e denotados por*

$$[\mathbf{w}]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Teorema

Seja $v_1, ..., v_n$ *uma base do espaço vetorial* V. *Os coeficientes de um vetor* $w \in V$ *são únicos.*

Prova: Suponhamos, por contradição, que existam dois conjuntos de coeficientes $c_1, ..., c_n$ e $d_1, ..., d_n$ para o vetor w na base $v_1, ..., v_n$, entao podemos escrever

$$w = c_1v_1 + ... + c_nv_n \text{ e } w = d_1v_1 + ... + d_nv_n$$

subtraindo obtemos

$$0 = (c_1 - d_1)v_1 + ...(c_n - d_n)v_n$$

e como $v_1, ..., v_n$ é L.I, os coeficientes devem ser zero, logo $c_1 = d_1$, ..., $c_n = d_n$.

Exemplo

Seja $\beta = \{1, 1 + t, 1 + t^2\}$ *a base de* $P_2(\mathbb{R})$, *as coordenadas de* $f(t) = 2 + 4t + t^2$ *nessa base são*

$$\begin{aligned} 2 + 4t + t^2 &= a_1(1) + a_2(1 + t) + a_3(1 + t^2) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3) + a_2t + a_3t^2 \end{aligned}$$

logo $a_3 = 1$, $a_2 = 4$ *e* $a_1 = -3$, *e assim*

$$[f(t)]_\beta = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Representação de imagens com uma combinação de bases

Uma imagem digital é composta de um conjunto de pontos chamados de pixels que são organizados em uma matriz de $m \times n$ pixels. Logo, uma base para representar uma imagems é um conjunto de $N = m.n$ matrizes L.I. Por exemplo para representar uma imagem com dimensões 3×3, pode-se usar o conjunto:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Nas imagens coloridas, cada pixel tem sua cor definida pela composição de elementos vermelho (R, *red*), verde (G, *green*), e azul (B, *blue*) conhecido como sistema RGB. Uma imagem A pode ter seuss pixels representados por $a_{ij} = r_{ij} + g_{ij}x + b_{ij}x^2$, sendo x uma base conveniente. Então uma imagem pode ser representada com $A = R + Gx + Bx^2$, sendo R, G e B as matrizes que representam as quantidades de vermelho, verde e azul dos pixels da imagem A.

Mudança de base

Vimos que um espaço vetorial de dimensão n tem como base qualquer conjunto formado por n de seus vetores que sejam L.I. Logo, dadas duas bases $\beta = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ e $\beta_1 = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ de um espaço V, podemos escrever um vetor v como

$$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n$$

ou

$$v = y_1 w_1 + y_2 w_2 + ... + y_n w_n$$

com coeficientes $[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

Porém, como $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ é uma base de V temos:

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{n1}u_n \\ w_2 &= a_{11}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{n1}u_n \\ &\vdots \\ w_n &= a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{nn}u_n \end{aligned}$$

e substituindo temos

$v = y_1(a_{11}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{n1}u_n) + ... + y_n(a_{1n}u_1 + a_{n2}u_2 + ... + a_{nn}u_n$

e como as coordenadas são únicas

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n1}y_2 + ... + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

e no forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

operação que transforma as coordenadas de $y_1, ..., y_n$ de uma base, nas coordenadas $x_1, ..., x_n$ de outra base.

Denotaremos

$$[I]_\beta^{\beta_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Mudança de base

Exemplo

Sejam $\beta_1 = \{(2,7),(3,-1)\}$ *e* $\beta_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ *bases do* $\mathbb{R}^2$*. Podemos obter a matriz de* β_2 *para* β_1 *fazendo*

$$(1,0) = a_{11}(2,7) + a_{21}(3,-1)$$

e

$$(0,1) = a_{12}(2,70 + a_{22}(3,-1)$$

e resolvendo o sistema

$$[I]_{\beta_2}^{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1/23 & -3/23 \\ 7/23 & -2/23 \end{bmatrix}$$

Se tivéssemos escrito $[I]_{\beta}^{\beta_1}$ teríamos $[w]_{\beta_1} = [I]_{\beta}^{\beta_1}[v]_{\beta}$. As matrizes $[I]_{\beta}^{\beta_1}$ e $[I]_{\beta_1}^{\beta}$ são inversíveis, e

$$\left([I]_{\beta}^{\beta_1}\right)^{-1} = [I]_{\beta}^{\beta_1}$$