Álgebra Linear

Edmar Candeia Gurjão

Departmento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Campina Grande
ecandeia@dee.ufcg.edu.br

Maio 2018

Apresentação

1. Livro: Álgebra Linear. Boldrini. 3a Edição, Harbra, 1980.
2. Livros auxiliares:
   - Álgebra Linear I e II. Luiz Manoel Figueiredo e Marisa Ortegoza da Cunha. Fundação Cecierj.
   - Curso de Álgebra Linear, Fundamentos e Aplicações. 3a Edição. Marcos Cabral e Paulo Goldfeld.
   - Álgebra Linear com Aplicações, Steven J. Leon, 4a Edição, LTC, 1998.
   - Álgebra Linear com Aplicações. Anton e Rorres, 8a Edição. Bookman.
3. Aulas:
   - Informações sempre disponíveis no site ecandeia.dee.ufcg.edu.br
   - Chamadas em todas as aulas: **faltas em 25% das aulas** $\rightarrow$ **não chamarei mais seu nome**.

Ementa $\times$ **Avaliações**

- **1a Avaliação: 80% Prova + 20% implementação computacional**
  - Matrizes **Capítulo 1**
  - Sistemas de Equações Lineares: **Capítulo 2**
  - Determinantes: **Capítulo 3**
- **2a Avaliação: 75% Prova + 25% implementação computacional**
  - Espaços Vetoriais: **Capítulos 4**.
- **3a Avaliação: 70% Prova + 30% implementação computacional**
  - Transformações Lineares: **Capítulo 5**
  - Auto-valores e auto-vetores **Capítulo 6**
- Reposição (prova)
- Final (prova)

Matrizes

- Matriz um agrupamento retangular de números.
- Os números neste agrupamento são chamados de **entradas** ou **elementos** da matriz.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 20 & 9 \\ -3 & 11 & -8 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 25 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Tamanho** de uma matriz: número de linas e de colunas.
- Matriz A tem dimensões 3×3 e matriz B 1×4, e indicamos $A_{3\times3}$ e $B_{1\times4}$, e de uma forma geral $A_{M\times N}$
- Entrada na i-ésima linha e j-ésima coluna é denotada por a_{ij}
- Tipos:
  - **Coluna:** $M > 1,\ N = 1$
  - **Linha:** $M = 1,\ N > 1$
  - **Quadrada:** $M = N$
  - **Nula:** $a_{ij} = 0,\ \forall i,\ j$
  - **Diagonal:** $M = N$, $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ e $a_{ij} \neq 0, \forall i = j$.
  - **Identidade:** $M = N$, $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ e $a_{ij} = 1, \forall i = j$. Outra forma de representar $\mathbf{I} = \delta_{ij}$, sendo

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases}$$

  - **Triangular superior:** $M = N$, $a_{ij} = 0, \forall i < j$.
  - **Triangular Inferior:** $M = N$, $a_{ij} = 0, \forall i < j$.
  - **Simétrica:** $M = N$, $a_{ij} = a_{ji}$.

Podemos escrever uma matriz como uma expressão. Por exemplo, vamos escrever a matriz 2×3 dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i + j, & se\ i = j \\ i - 2j, & se\ i \neq j \end{cases}$$

Operações com Matrizes

- **Igualdade:** $\mathbf{A}_{M\times N}$ e $\mathbf{B}_{M\times N}$ são iguais se $a_{ij} = b_{ij},\ \forall\ i, j$
- **Adição:** Dados $\mathbf{A}_{M\times N} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{B}_{M\times N} = [b_{ij}]$, temos $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{M\times N}$.
  - $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (comutatividade)
  - $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (associatividade)
  - $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ sendo $\mathbf{0}$ a matriz nula $M \times N$.
- **Multiplicação por um escalar:** $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{M\times N}$ e k um número, então $k \times \mathbf{A} = [ka_{ij}]_{M\times N}$.
  - $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$
  - $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$
  - $0 \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$
  - $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{A}$
- **Transposição:** Dada $\mathbf{A}_{M\times N} = [a_{ij}]$, sua **transposta** é obtida fazendo $b_{ij} = a_{ji}$, e é denotada por A^T ou A'.
  - Se $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ então a matriz $\mathbf{A}$ é **simétrica**.
  - Se $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ então a matriz $\mathbf{A}$ é **anti-simétrica**.
  - $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
  - $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
  - $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$
- **Multiplicação de Matrizes:** Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{M\times N}$ e $\mathbf{B} = [b_{rs}]_{N\times P}$ define-se $A \times B = [c_{uv}]_{M\times P}$ sendo

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{N} a_{uk}b_{kv} = a_{u1}b_{1v} + \ldots + a_{un}b_{nv}$$

- Geralmente $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
- $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
- $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (veja a mudança na ordem das matrizes)
- $\mathbf{0} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{A} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Multiplicação de Matrizes

Exemplo

É sempre verdade que $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ *?*

Exemplo

Sendo $\mathbf{A}$ *uma matriz, o fato de* $\mathbf{A}^2 = 0$ *implica que* $\mathbf{A} = 0$*?*

Exemplo (Adaptado de Álgebra Linear, David Poole)

Ana e Beto desejam comprar frutas para a próxima semana. Cada um deles quer comprar algumas maças, bananas e laranjas, Ana quer 6 maças, 3 bananas e 10 laranjas, Beto quer 4 maças, 8 bananas e 5 laranjas. Nas proximidades existem duas bancas - a do Sam e a do Téo - cujos preços estão apresentados na tabela abaixo. Quanto gastarão Ana e Beto para fazer suas compras em cada uma das bancas?

	Sam	Téo
Maça	0,10	0,15
Banana	0,4	0,30
Laranja	0,1	0,2

Exemplo

Em uma determinada região existem quatro cidades A, B, C e D. Existe um caminha que interliga A para B, outro entre A e C, um que interliga B e C e um que retorna para A, um de B para D e outro de C para D. Quantos percursos de quatro passos existem entre A e D?

Exemplo

Como ficariam os percursos do exemplo anterior se os caminhos fossem unidirecionais?

Sistemas e Matrizes

- Sistema Linear com M equações e N incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_N = b_2 \\ \vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{MN}x_N = b_M \end{cases}$$

  sendo a_{ij} números reais.
- Solução do sistema é uma N-úpla $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ que satisfaça simultaneamente as M equações.
- Podemos escrever o sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes.
- $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$ é a matriz das incógnitas.
- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.
- $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ é a matriz aumentada.

- Permuta da i-ésima linha pela j-ésima linha $(L_i \leftrightarrow L_j)$
- Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k. $(L_i \leftrightarrow kL_i)$
- Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais k vezes a j-ésima linha. $(L_i \leftarrow L_i + kL_j)$.

Sejam **A** e **B** matrizes $M \times N$, dizemos que **B** é linha equivalente à **A**, se **B** for obtida a partir de um número finito de operações elementares sobre as linhas de **A**.

Teorema

Sejam A e B duas matrizes ampliadas de dois sistemas (com as mesmas variáveis). Se as matrizes A e B são equivalentes (A ˜ B) , então os sistemas correspondentes são equivalentes (tem o mesmo conjunto solução).

Forma Escada

Definição

Uma matriz $M \times N$ é linha reduzida à forma escada se:

- O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.
- Cada elemento que contém o primeiro elemento não nulo de algumas linha tem todos os seus elemento iguais a zero.
- Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.
- Se as linhas $1, ..., r$ são linhas não nulas, se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_s < ... < k_r$

Exemplo

Escrever a matriz abaixo na forma escada.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Teorema

Toda matriz $\mathbf{A}_{M\times N}$ é linha-equivalente a uma única matriz-linha reduzida à forma escada.

Definição

*Dada uma matriz $\mathbf{A}_{M\times N}$, seja $\mathbf{B}_{M\times N}$ a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a **A**. O posto de **A**, denotado por p, é o número de linhas não nulas de **B**. A nulidade de **A** é o número $n - p$.*

Soluções de um Sistema de Equações Lineares

Sistema Linear com M equações e N incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_N = b_2 \\ \vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + ... + a_{MN}x_N = b_M \end{cases}$$

esse sistema pode ter

- uma única solução $x_1 = k_1, x_2 = k_2, ..., x_N = k_N$
- infinitas soluções
- nenhuma solução.

Definição

Posto *(p): número de linhas não nulas de uma matriz.* **Grau de Liberdade:** *para uma matriz $m \times n$ é $n - p$.* **Nulidade:** *$n - p$.*

Teorema

- *Sistema admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.*
- *Se as duas matrizes tem o mesmo posto p e $p = N$ a solução será única.*
- *Se as duas matrizes tem o mesmo posto p e $p < N$, podemos escolher $N - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão função destas.*

$N - p$ é chamado de grau de liberdade do sistema.

Método de Resolução de Sistemas Lineares

Dado o sistema, reduzimos a sua matriz à forma escalonada, então podemos determinar se há solução, caso haja, estará determinada.

Aplicações Solução Sistema Linear

Exemplo

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 18 \\ x + y - 2z = -5 \\ -x + 3z = 4 \end{cases}$$

Exemplo

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} -x - 2y - 4z = 2 \\ -7y + 11z = -25 \\ 3x + +13y + 4z = 16 \end{cases}$$

Exemplo

Resolva o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} tg(x) - 2sen(y) = 2 \\ tg(x) - sen(y) + cos(z) = 2 \\ sen(y) - cos(z) = -1 \end{cases}$$

Exemplo

Determine o polinômio de terceiro grau que tem os seguintes valores $p(1) = 1$, $p(-1) = 7$, $p(2) = 5$ *e* $p(-2) = -23$.

Determinantes

Dada uma matriz quadrada $\mathbf{A}_{N\times N}$ define-se o seu determinante como

$$det\mathbf{A}_{N\times N} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Delta_{ij}$$

sendo $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ o co-fator e $|A_{ij}|$ o determinante da submatriz obtida retirando a i-ésima linha e j-ésima coluna.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

O desenvolvimento de Laplace é um procedimento recursivo.

Propriedades:

- Se todos os elementos de uma linha (coluna) forem nulos, $det(A) = 0$.
- $det(A) = det(A^T)$.
- Se multiplicarmos uma linha de uma matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por essa constante.

Definição (Matriz dos cofatores)

$\overline{A} = [\Delta_i j]$.

Definição (Matriz Adjunta)

Para uma matriz quadrada $adj(A) = \overline{A}^T = [\Delta_i j]^T$.

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Teorema

$A \times \overline{A}^T = det(A)I_n$

Matriz Inversa

Definição (Matriz Inversa)

A matriz inversa de $\mathbf{A}_{n\times n}$ *é uma matriz* $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ *tal que*

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Observações:

- Qual número aparece no denominador dos exemplos anteriores?
- Nem toda matriz tem inversa.
- Se **A** e **B** são quadradas de mesma dimensão, e ambas inversíveis, entãoo
  1. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}^{-1}$.
  2. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$
- Se $\mathbf{A}^{-1}$ existe: $det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}) = det\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = det(\mathbf{I}_n) = 1$, logo $det(\mathbf{A})\cdot det(\mathbf{A}^{-1}) = 1$
  1. $det(\mathbf{A}) \neq 0$
  2. $det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{det(\mathbf{A})}$ e $det(\mathbf{A})$ é uma condição necessária para que a inversa exista.

Teorema

Uma matriz quadrada **A** *admite inversa se e somente se,* $det(\mathbf{A}) \neq 0$ *e*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det\mathbf{A}}adj(\mathbf{A})$$

Exemplo

Interpretação Geométrica: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ e vamos considerar $\mathbf{v}_1 = [a\ b]$ e $\mathbf{v}_2 = [c\ d]$ com $a > c$ e $b > d$.

FIGURA

Teremos que $2A_1 + 2A_2 + 2A_3 + A_p = (a+c)(b+d)$, logo

$$2(\frac{bd}{2}) + 2(\frac{ab}{2}) + 2cb + A_p = ab + ad + cb + cd$$

$$A_p = ad - cd$$

logo

$$A_p = \left| \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \right|$$

o módulo é necessário pois a troca de colunas inverte o sinal do determinante.

Obs.: Numa mariz 3×3 o determinante é o volume do paralelógramo.

Determinantes - Regra de Cramer

Seja um sistema com n equações e n incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

escrevendo na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} + ... + a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} + ... + a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ou $Ax = b$
Vamos assumir que $det(A) \neq 0$, logo A^{-1} existe e

$$\begin{aligned} A^{-1}(Ax) &= A^{-1}b \\ (A^{-1}A)x &= A^{-1}b \\ I_n x &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b \end{aligned}$$